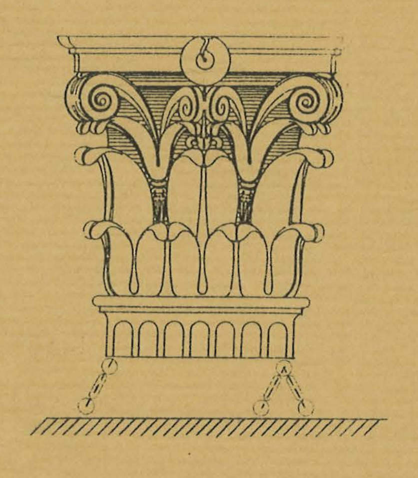
EQUILIBRIO DEL SÓLIDO INDEFORMABLE

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS DE *APOYO A LA DOCENCIA* DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO INDEFORMABLE

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS DE *APOYO*
A LA DOCENCIA DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA DE
MADRID

Cuaderno 17
ISBN: 84-89977-15-1
Depósito Legal: M-20013-1998

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO INDEFORMABLE.

La condición estructural básica a conseguir en edificación es el **equilibrio estático** para cualquier sistema previsible de fuerzas.

La primera comprobación elemental es el equilibrio de la estructura como sólido indeformable.

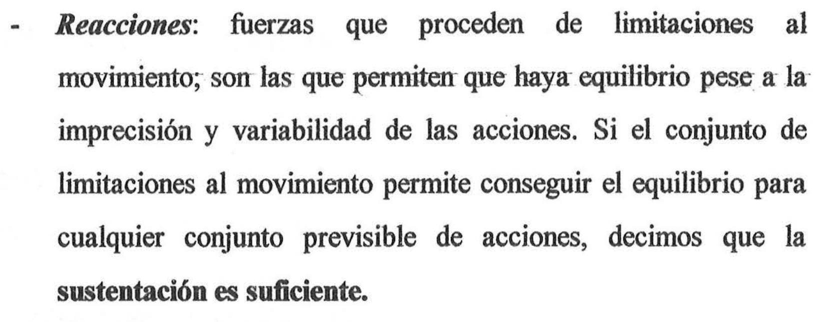
- **Sólido indeformable**: no pueden existir en la naturaleza "sólidos indeformables". Llamamos **sólido indeformable** a un modelo en el que *no medimos las deformaciones* porque son irrelevantes para el problema que se trata de resolver.

- **Fuerza**: *aquello* que provoca una *aceleración en una masa.* La idea de *fuerza* está ligada a la de *posibilidad de movimiento.* Sólo son relevantes las fuerzas que pueden provocar movimientos.
  Ejemplo: cuando el modelo de sólido está en el plano de la pizarra y no puede salir de él, las componentes de fuerzas perpendiculares al plano de la pizarra son irrelevantes.

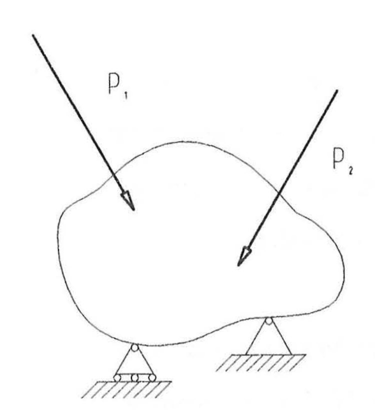
- **Equilibrio**: en las estructuras de edificación sólo nos interesa, salvo excepciones, el **equilibrio estático**: precisamente tratamos de que no haya componentes de aceleración y de que no haya movimiento... Las fuerzas actuando sobre la estructura deben anularse exactamente; ya que el menor desequilibrio provocaría un movimiento acelerado altamente indeseable.

- **Tipos de fuerzas**:

- *Acciones*: fuerzas propiamente dichas que actúan sobre la estructura. Son por naturaleza imprecisas y variables.



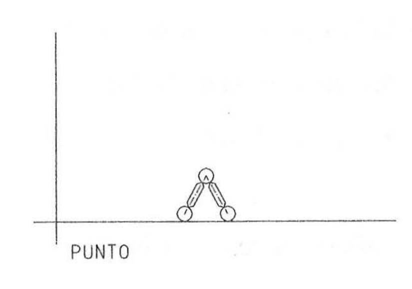
- ***Reacciones***: fuerzas que proceden de limitaciones al movimiento; son las que permiten que haya equilibrio pese a la imprecisión y variabilidad de las acciones. Si el conjunto de limitaciones al movimiento permite conseguir el equilibrio para cualquier conjunto previsible de acciones, decimos que la **sustentación es suficiente.**
- ***Solicitaciones***: fuerzas internas que se hacen patentes cuando mediante cortes se aíslan trozos del sólido, que a su vez también deben estar en equilibrio.



- **Expresión del equilibrio**:

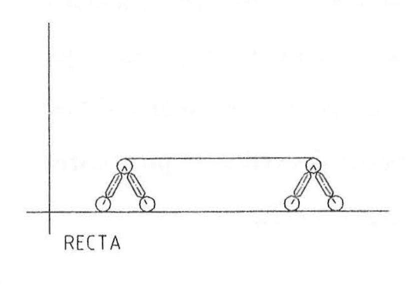
Dado un *sólido*, el *sistema o sistemas de acciones* que actúan sobre él —representados por vectores deslizantes— y su *sustentación*; para conocer el sistema completo de fuerzas, debemos empezar siempre calculando las *reacciones*, a partir de la idea de que está en *equilibrio*.

Podemos expresar el equilibrio mediante:
- Métodos gráficos.
- Ecuaciones de equilibrio.
- Principio de los trabajos virtuales.



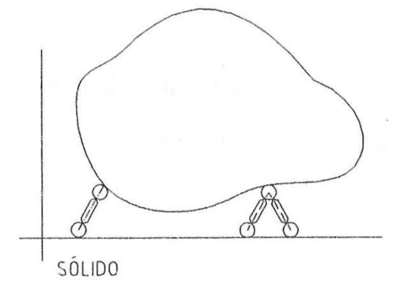
1.- **Equilibrio.**

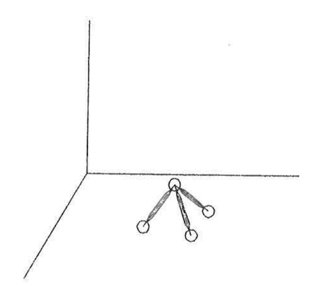
A cada posibilidad de movimiento corresponde una ecuación de equilibrio.



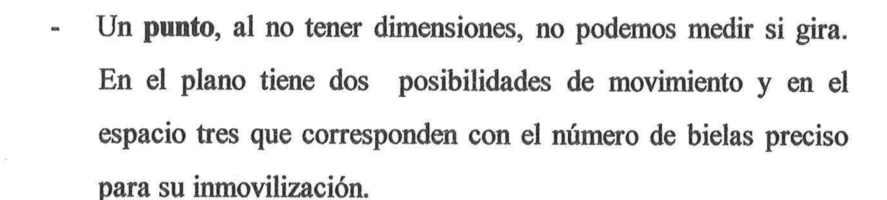
Para expresar gráficamente las posibilidades de movimiento es conveniente recurrir al concepto de **biela.**

Una biela coarta una posibilidad de movimiento. Un ente geométrico tiene tantas posibilidades de movimiento como bielas es preciso disponer para dejarlo inmóvil.

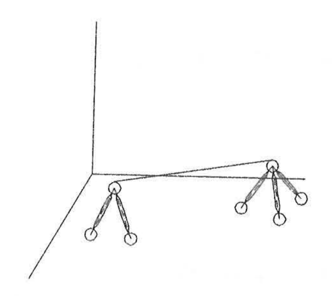




PUNTO

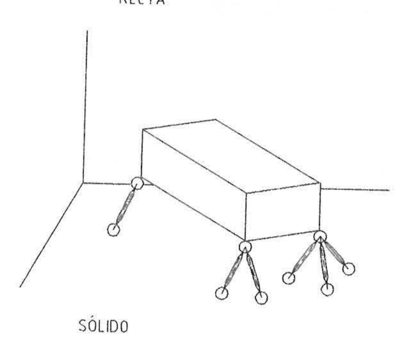


- Un **punto**, al no tener dimensiones, no podemos medir si gira. En el plano tiene dos posibilidades de movimiento y en el espacio tres que corresponden con el número de bielas preciso para su inmovilización.



RECTA

- Una **recta** no podemos medir si gira sobre sí misma en el espacio —en el plano no puede y por tanto no es distinguible de un sólido—. En el plano tiene tres posibilidades de movimiento y en el espacio cinco, que corresponden al número de bielas preciso para inmovilizarla.



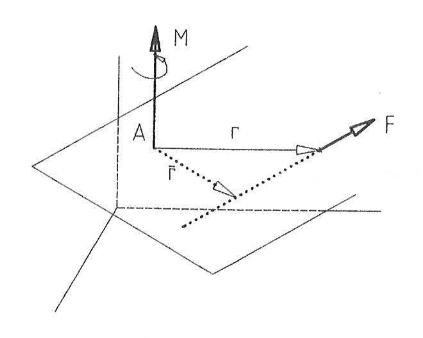
SÓLIDO

- Un **sólido** necesita en el espacio seis bielas, es decir, su posición depende de seis parámetros que corresponden a seis posibilidades de movimiento.

Disponemos de tantas ecuaciones de equilibrio como posibilidades de movimiento.

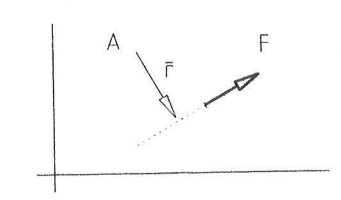
En el plano de tres ecuaciones: En el espacio de seis ecuaciones:

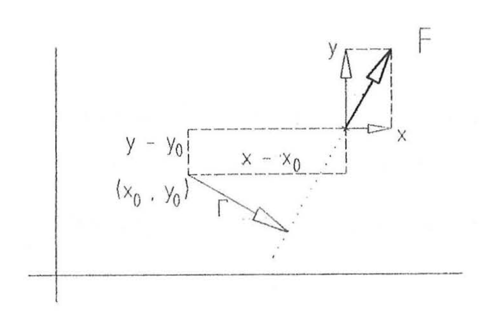
$\Sigma X_i = 0$	$\Sigma X_i = 0$	$\Sigma M_{xi} = 0$
$\Sigma Y_i = 0$	$\Sigma Y_i = 0$	$\Sigma M_{yi} = 0$
$\Sigma M_i = 0$	$\Sigma Z_i = 0$	$\Sigma M_{zi} = 0$



Llamamos **momento** de un vector respecto a un punto al **producto vectorial** de la fuerza por el vector posición de su punto de aplicación respecto al punto en el que estamos hallando el momento

En el plano, el momento de la fuerza F respecto al punto tiene como módulo $|F|\cdot|r|$ y es siempre perpendicular al plano. El convenio de signos que se toma, salvo indicación



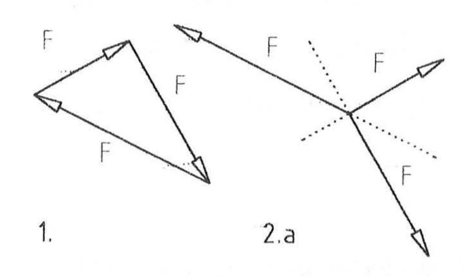


contraria, es:

A veces es útil usar los componentes:

$$|F|\cdot|r| = \bar{x}\cdot(y-y_0)-\bar{y}\cdot(x-x_0)$$

2.- **Métodos gráficos**:

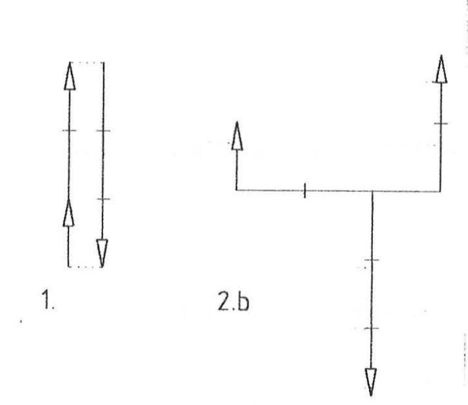


Las dos condiciones de equilibrio que se establecen son:

1.- Sumatorio nulo.

2.- a.-Concurrencia —si no son vectores paralelos—.

b.- Momento nulo —si son los vectores paralelos—.



3.- **Naturaleza de las fuerzas exteriores.**

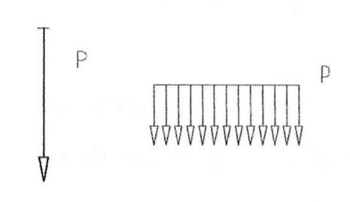
- **Tipos de acciones.**

1.- **Aceleraciones**: gravedad, sismo...

2.- **Impacto**: viento.

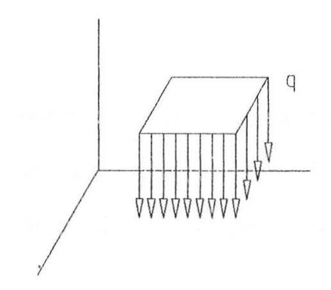
3.- **Cambios de dimensión**: dilatación-retracción.

Al modelar las acciones las reducimos a las siguientes tipos de carga —representados por vectores—:



1.- P: **cargas puntuales** (kN).

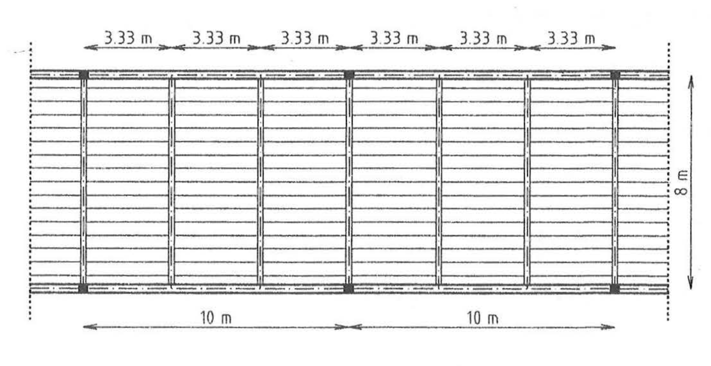
2.- p: **cargas por unidad de longitud** ($kN\cdot m^{-1}$).



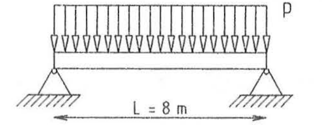
3.- q: **cargas por unidad de superficie** ($kN\cdot m^{-2}$).

4.- El **peso propio** es realmente una carga por unidad de volumen que se expresa en $kN\cdot m^{-3}$, pero normalmente suele reducirse a uno de los casos anteriores.

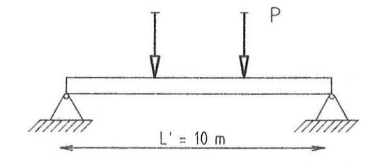
Las cargas puntuales y lineales no existen realmente —una fuerza realmente puntual como la de un clavo se introduce en el material y una lineal, como la de un cuchillo, lo corta—.



q = 7 kN m⁻² p = 7 kN m⁻² x 3,3 m = 23,1 kN m⁻¹ P = 23,1 kN m⁻¹ x 8/2 m = 92,4 kN



VIGA SECUNDARIA



JÁCENA PRINCIPAL

Sea un modelo de planta con estructura similar a la de la Escuela —ver figura—.

- El forjado soporta una carga por unidad de superficie q.
- Esta carga se transmite a las vigas secundarias. Podemos considerar que éstas soportan una carga por unidad de longitud $p = q \cdot s$.
- A su vez estas vigas secundarias apoyan en las jácenas principales. Se pueden modelar estas acciones como cargas puntuales en las jácenas: $P = q \cdot s \cdot \frac{L}{2}$

- **Unidades:**

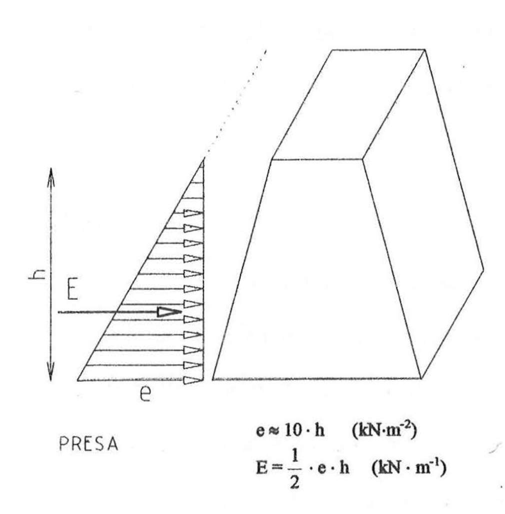
En el sistema internacional la unidad es el **Newton**: un Newton es la fuerza capaz de comunicar a una masa de 1Kg la aceleración de 1 $m \cdot s^{-2}$.

Como es una medida muy pequeña en términos de acciones, solemos expresar las mismas en **kilonewton.**:

1 kN = 103 kp (kilopondios)

—aunque con frecuencia, dada la escasa precisión de nuestros datos, bastará tomar 1 kN = 100 kp—.

- La **gravedad** —que produce una aceleración de 9,8 $m \cdot s^{-2}$— es la causa de acciones más importante: las acciones gravitatorias son las determinantes del diseño, salvo estructuras extraordinariamente altas. —El **sismo** podemos considerarlo como una *inclinación oscilante de la gravedad* que además depende de la relación del edificio con el suelo. Los componentes horizontales del sismo de aceleración son un orden menores que los de la gravedad—.

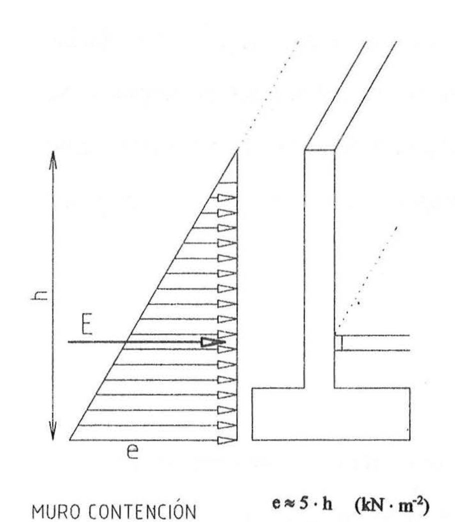


En edificios de pisos la **carga gravitatoria total** es del orden de 6 a 7 $kN \cdot m^{-2}$ de planta. Se compone de:

a.- **Peso propio de la estructura.** En edificios convencionales, aproximadamente 1/3 de las cargas gravitatorias totales.

b.- **Cargas permanentes** o concargas: solado, tabiquería... Aproximadamente 1/3 del total.

c.- **Sobrecarga de uso.** Aproximadamente 1/3 del total.

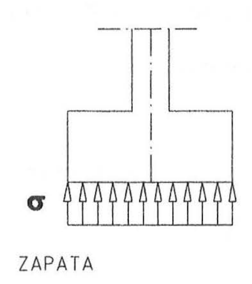


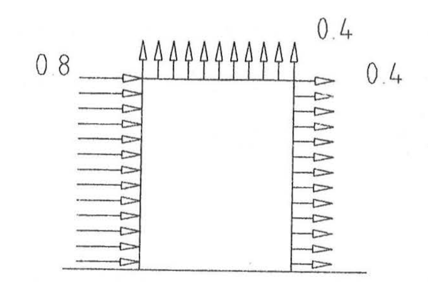
Otras consecuencias de la gravedad son:

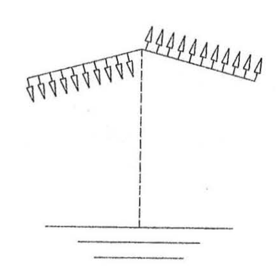
- La presión hidrostática: en presas —una presión de $10 \cdot h$ $kN \cdot m^{-2}$ a una profundidad h en m.

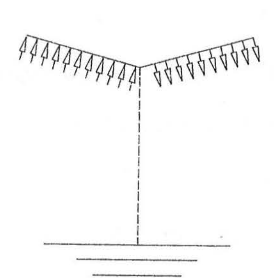
- Empujes del suelo en muros de contención, del orden de $5 \cdot h$ $kN \cdot m^{-2}$, siendo h la altura de tierras.

- Reacciones del suelo en cimentación del orden de 200 a 300 kN/m^2. Recordando que las acciones gravitatorias son del orden de 6 $kN \cdot m^{-2}$ la superficie total de las zapatas de un edificio es del orden de 1/30 a 1/50 de la suma de superficies de todas las plantas.









- **Viento:**

  Se traduce su efecto a una fuerza estática del orden de 1 kN·m^{-2}. Su efecto es mucho menor que el de las acciones gravitatorias no sólo por su magnitud unitaria menor, sino porque actúa sobre una superficie menor—la superficie de fachada es mucho menor que la de los forjados—.

  El viento puede originar problemas de estabilidad en estructuras altas y ligeras. En general sólo obligará a cambios menores en la estructura, aunque pueda dar lugar a problemas locales —en grandes ventanales por ejemplo—. Conviene comprobar también la posibilidad de cambio de sentido de esfuerzos en cerramientos ligeros —del orden de 0,4 kN·m^{-2}—.

- **Impactos**: caída de contrapesos de ascensor.

  Su efecto depende de la rigidez de la estructura. En los automóviles se trata de aminorar el efecto del impacto diseñando elementos de gran deformación controlada.

- **Cambios de dimensión**:

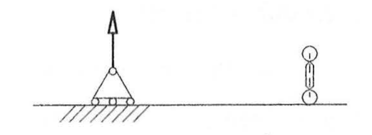
  - Se evita considerar en los cálculos el efecto de las **dilataciones térmicas** con juntas de dilatación aproximadamente cada 30 m. Éstas sirven también para paliar el efecto de la **retracción del hormigón.**

  - La **expansividad del ladrillo** obliga también a realizar juntas en los edificios. Son aconsejables juntas cada 12 m en las fábricas.

4.- **Sustentación**:

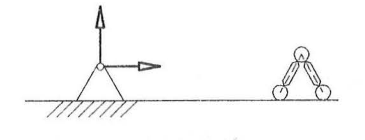
La **sustentación** es el conjunto de limitaciones al movimiento que permite completar exactamente un sistema de fuerzas en equilibrio para cualquier magnitud y combinación posible de acciones.

La sustentación se produce mediante una combinación de apoyos. Los modelos de apoyo son:



APOYO SIMPLE

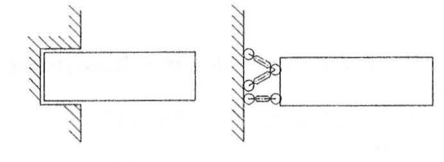
- **Apoyo en dilatación** o **apoyo simple**. Sólo coarta una posibilidad de movimiento. Reacción perpendicular al plano. *Equivale a una biela.*



ARTICULACIÓN

- **Articulación**. Coarta dos posibilidades de movimiento pero no el giro. Reacción con dos componentes. *Equivale a dos bielas.*

- **Empotramiento**. Coarta movimiento y giro. Dos componentes de fuerza y uno de momento. *Equivale a tres bielas.*



EMPOTRAMIENTO

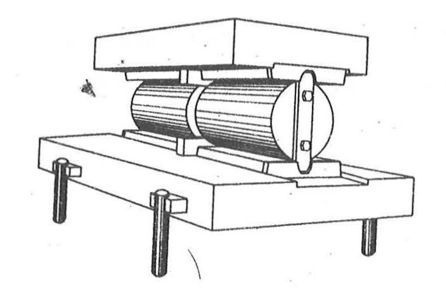
En el espacio los modelos de apoyo son entre otros:

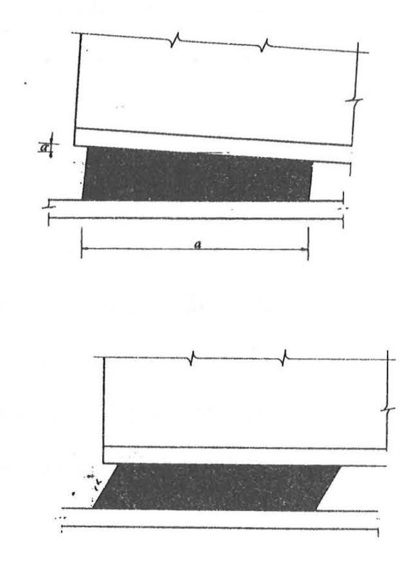
- **Rótula esférica**. Impide el movimento. Tiene tres componentes de reacción. Equivale a tres bielas.

- **Rótula cilíndrica**. Impide el movimiento y dos giros. Tiene cinco componentes de reacción. Equivale a cinco bielas

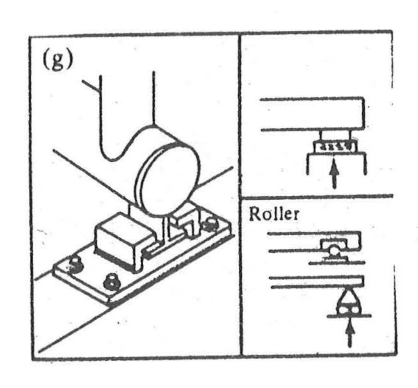
- **Empotramiento perfecto**. Impide movimiento y giros. Tiene seis componentes de reacción que equivalen a seis bielas.

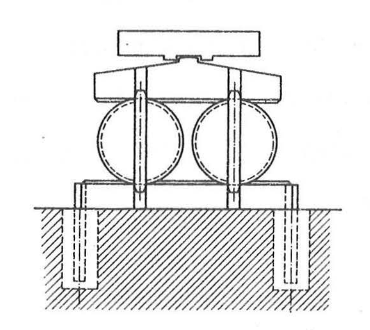
Ejemplos de sustentaciones en construcción.



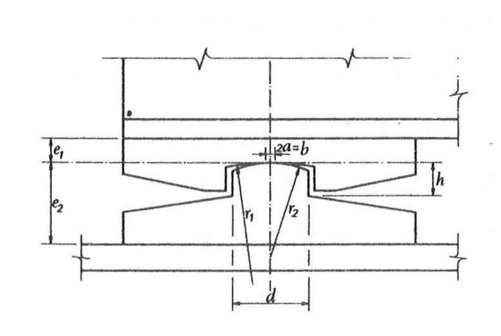


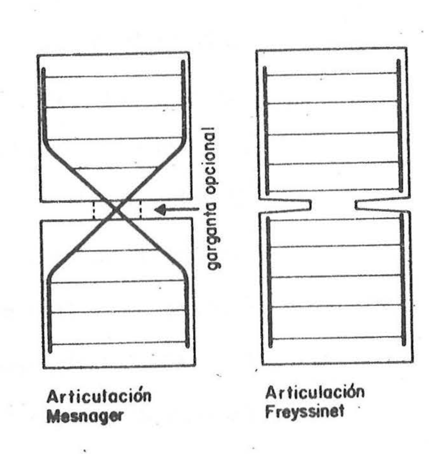
Apoyos en dilatación.

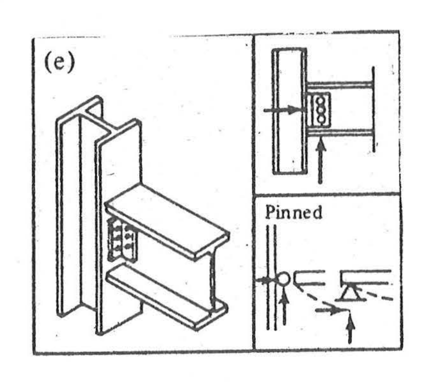




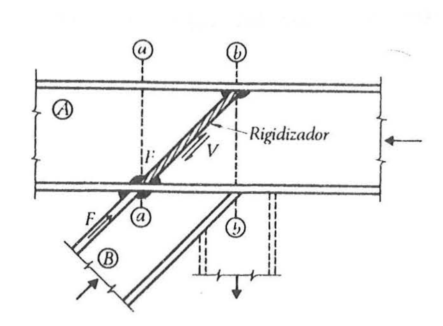
Articulaciones.

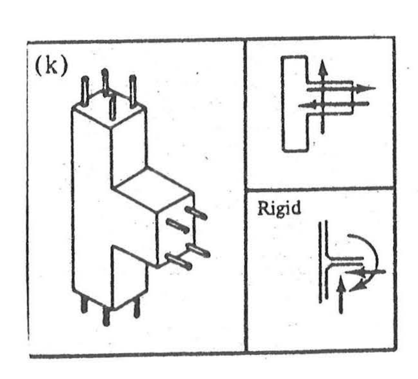


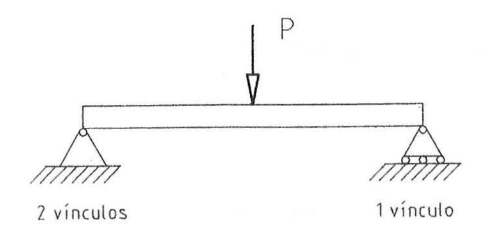




Empotramientos

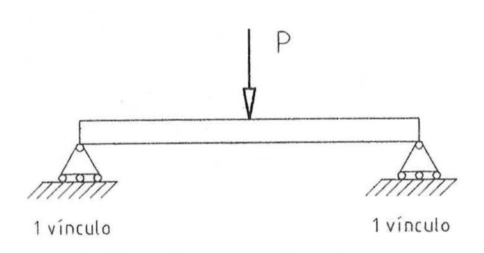






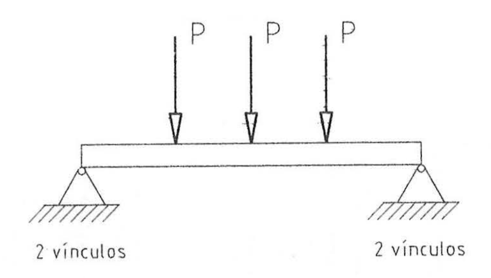
Sustentación isostática:

En el plano tres condiciones de sustentación y en el espacio seis, igualan el número de ecuaciones necesarias. Basta la estática para determinar las reacciones.



Sustentación hipostática:

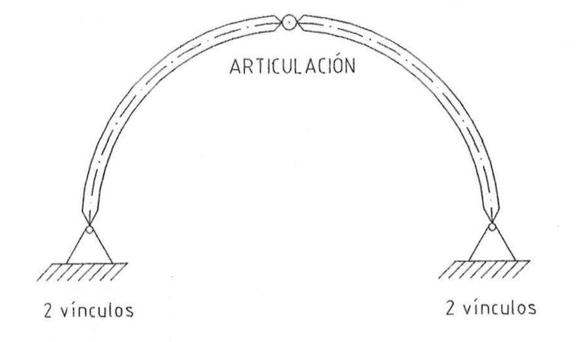
Si hay menos de tres condiciones en el plano y seis en el espacio. Las cargas simétricas o la ausencia de componentes en algunas direcciones pueden equivaler a condiciones de sustentación —aunque en la realidad nunca hay simetría perfecta ni componentes inexistentes—.



Sustentación hiperestática:

Si hay más de tres condiciones de apoyo en el plano y más de seis en el espacio, *no pueden calcularse las reacciones si no se conocen otras condiciones*. Una excepción: si en la estructura de la figura sólo actúan cargas verticales, y prescindimos del posible efecto de catenaria de la viga deformada, sí se podrían calcular las reacciones.

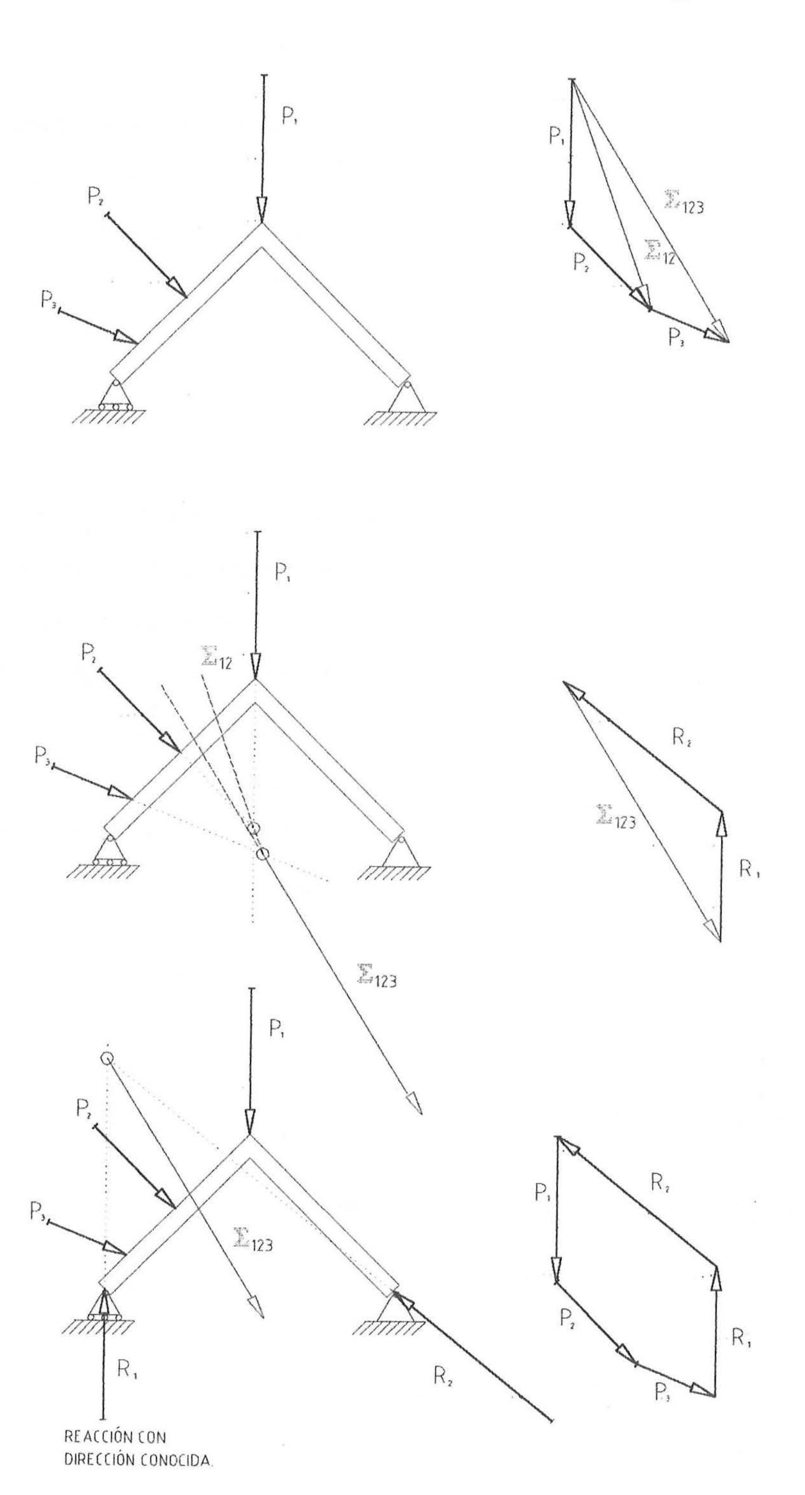
En el caso de sustentación hiperestática el exceso de condiciones de sustentación puede compensarse con falta de vínculos en el interior de la estructura. Por ejemplo el arco de tres articulaciones de la figura:



Hay cuatro condiciones de sustentación pero la articulación interior del arco permite plantear una ecuación suplementaria.

5.- Cálculo de reacciones.

a.- **Método gráfico:**



Se puede determinar la magnitud y posición de la resultante de las acciones y a partir de ella las reacciones.

- En primer lugar hallamos la **resultante** de las cargas . (1)
- Conocida la dirección de una de las reacciones —R_1—, podemos determinar la dirección de ambas y su magnitud. (2)
- Finalmente comprobamos que el sistema está equilibrado. (3)

Observaciones:

- Si en lugar de apoyada-articulada la estructura estuviera doblemente apoyada, las reacciones estarían indeterminadas: necesitaríamos más condiciones para resolver el problema.
- Si la estructura estuviera doblemente apoyada **no habría equilibrio** ya que no se compensaría la acción horizontal.

b.- **Método analítico. Ejemplo 1.**

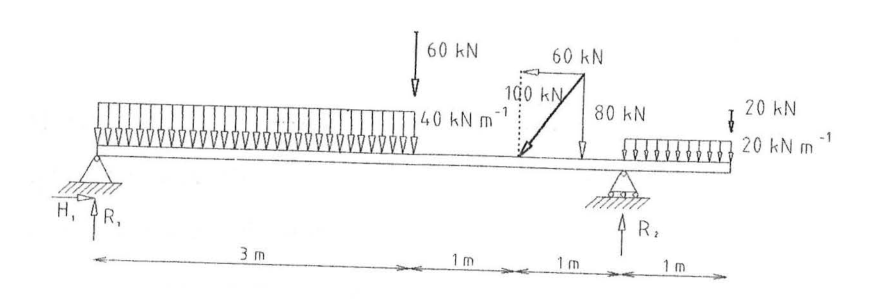
1. Identificar incógnitas —en el ejemplo H_1, R_1 y R_2—.

2. Si la estructura es **isostática** —como en este caso— planteamos las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$



- Si la estructura fuera **hiperestática** necesitaríamos otras condiciones además de las ecuaciones de equilibrio. Se basan en deformaciones partiendo del predimensionado de la misma.

3. Resolución del sistema:

$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H_1 = 60\ kN}$

$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 120 + 60 + 80 + 20 + 20 = R_1 + R_2 = 300\ \text{kN}$

$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow \quad 5 \cdot R_1 = 120 \cdot 3{,}5 + 60 \cdot 2 + 80 \cdot 1 - 20 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot 1 = 590$

$\mathbf{R_1 = 118\ kN}$

$\mathbf{R_2 = 182\ kN}$

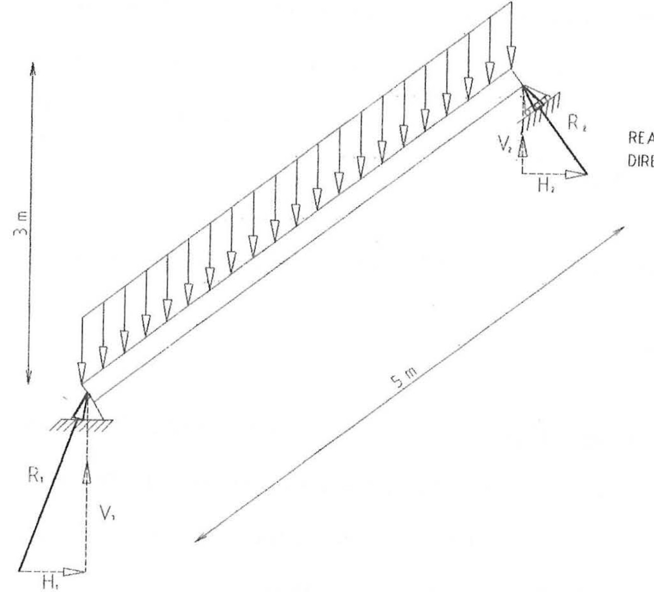
4. Comprobación del equilibrio:

$\sum X \Rightarrow \quad 60 = 60$

$\sum Y \Rightarrow \quad 118 + 182 = 120 + 80 + 20$

$\sum M = 0 \Rightarrow M_{(2)} = 0 \Rightarrow \quad 118 \cdot 5 - 120 \cdot 3{,}5 - 60 \cdot 2 - \quad 80 \cdot 1 + 20 \cdot 0{,}5 + 10 = 0$

b.- **Método analítico. Ejemplo 2:**



- Se trata de una barra inclinada. Seguimos los pasos descritos anteriormente.
- Para plantear equilibrio recurrimos a la descomposición de fuerzas.

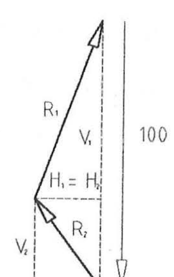
$\sum F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = H_2$

$\sum M_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 \cdot 2 - R_2 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 40 \text{ kN}$

$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 + V_2 = 100$

$$V_2 = R_2 \cdot \cos\alpha = 40 \cdot \frac{4}{5} = 32 \text{ kN}$$

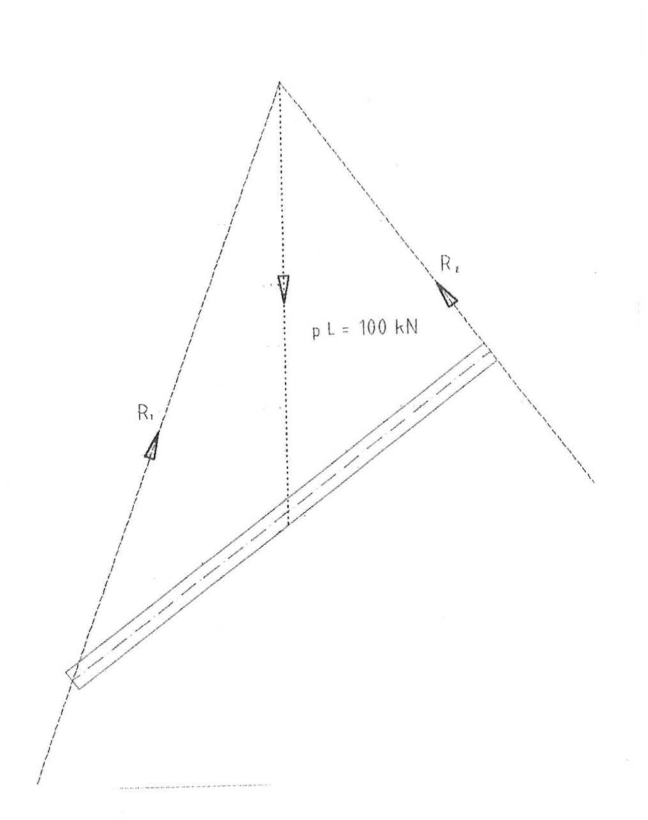
$$V_1 = 100 - 32 = 68$$



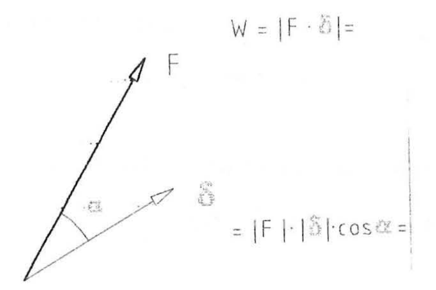
$$H_2 = R_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 40 \cdot \frac{3}{5} = 24 \text{ kN}$$

$$H_1 = H_2 = 24 \text{ kN}$$

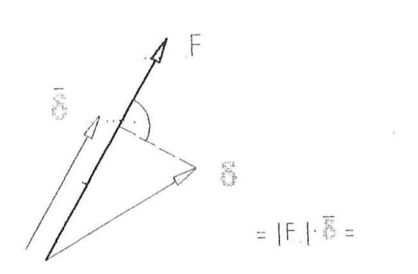
$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = 72{,}11 \text{ kN}$$



c.- **Trabajos virtuales.**



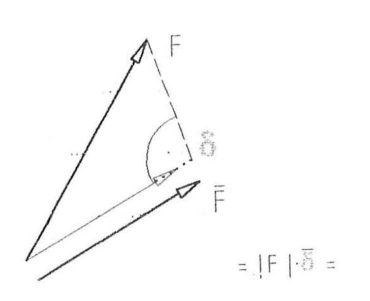
Llamamos **trabajo** de una fuerza F al recorrer un camino δ al **producto escalar F · δ**, que es igual a la fuerza por la proyección del camino en su dirección.—o a la proyección de la fuerza sobre la dirección del camino por éste—. Es positivo si fuerza y proyección tienen el mismo sentido y negativo si tienen sentidos contrarios.



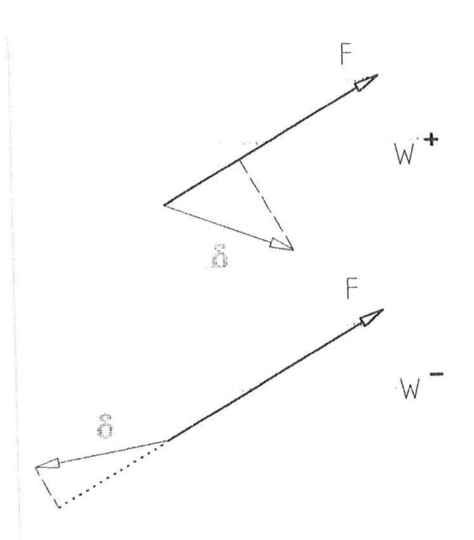
El trabajo de un sistema nulo es 0 para cualquier movimiento.

En consecuencia:

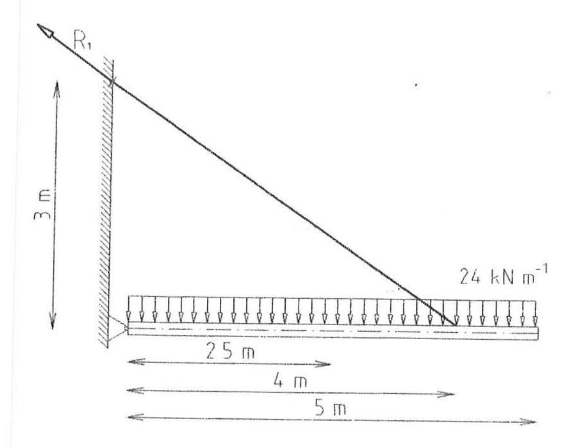
Si tenemos un sistema de fuerzas en equilibrio y lo sometemos a un movimiento arbitrario virtual —compatible con las condiciones de apoyo—, **el trabajo desarrollado es nulo. —Principio de los trabajos virtuales—**.



El **Principio de los trabajos virtuales** no es más que una forma escalar de expresar el equilibrio. —De hecho, pueden generarse todas las ecuaciones de equilibrio sin más que aplicar un movimiento virtual para cada una de ellas: dos traslaciones y un giro en el plano; tres traslaciones y tres giros en el espacio—.



Plantear el equilibrio empleando la expresión de trabajo nulo tiene la ventaja de utilizar escalares en lugar de vectores. El inconveniente es que se pierde mucha información del sistema —lo que a veces, si queremos averiguar pocas cosas no es inconveniente—.



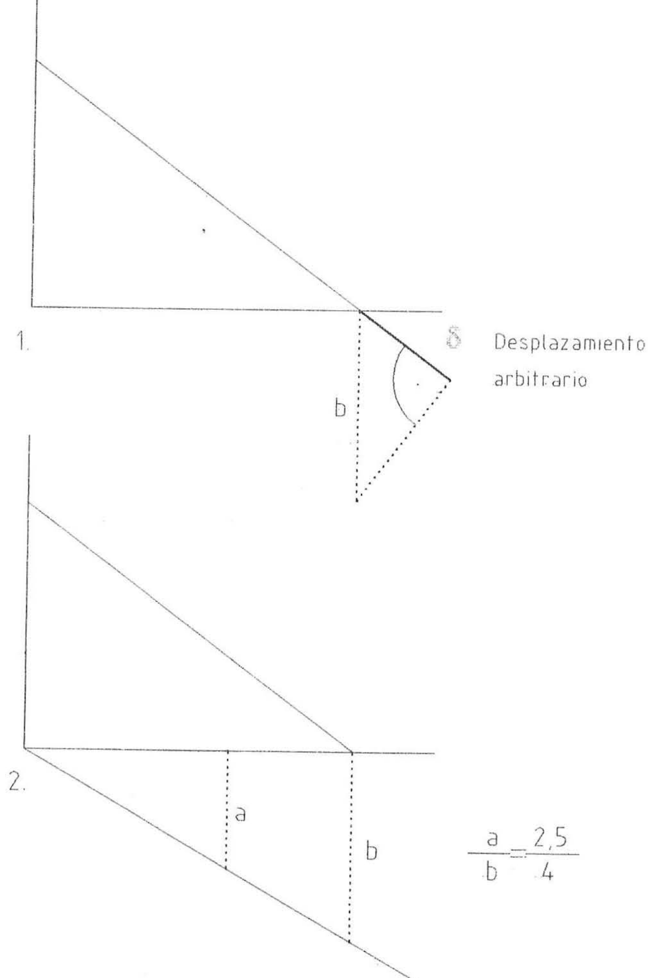
Ejemplo:

- Cálculo de la solicitación R_1 en el cable de la estructura de la figura.

- Se supone un movimiento arbitrario: el alargamiento δ del cable. Este alargamiento puede traducirse en:

1. Un movimiento vertical del anclaje del cable en la viga:

$$\frac{b}{\delta} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{3} \cdot \delta$$



2. Un desplazamiento vertical de la resultante de las cargas:

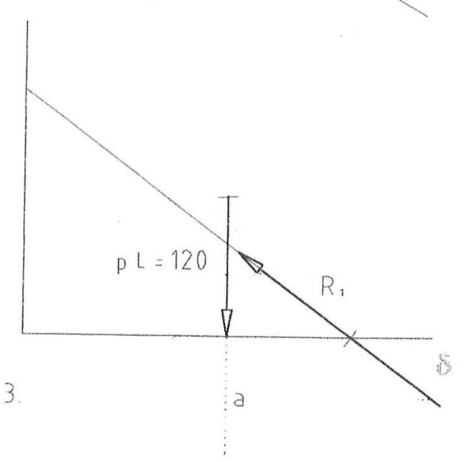
$$\frac{a}{b} = \frac{2.5}{4} \Rightarrow a = \frac{2.5}{4} \cdot b = \frac{2.5}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \delta = \frac{12.5}{12} \cdot \delta$$

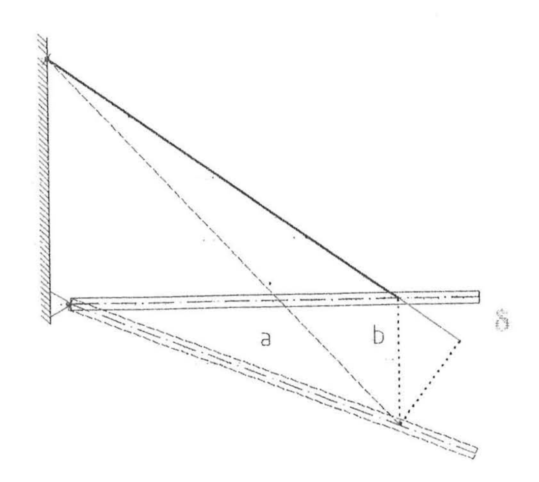
3. El trabajo total debe ser nulo:

$$-R_1 \cdot \delta + \frac{12.5}{12} \cdot \delta \cdot 120 = 0 \qquad \mathbf{R_1 = 125\ kN}$$

Una vez que conocemos R_1 ya es fácil conocer el resto.

Basta resolver el mismo problema analíticamente para comprobar que el proceso es más lento.





CUADERNO

17.01